

1/ Définition

On appelle matrice  $M$  de type  $m \times n$ , un tableau rectangulaire d'éléments  $a_{ij}$  de  $K = \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ )

$$M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2/ Types de matrices / Définitions :

$M$  est une matrice carrée si  $n = m$ .  $M$  est dite d'ordre  $n$

$M_n(K)$  est l'ens des matrices carrées

$M$  est diagonale si  $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$  ;  $M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

$M$  est triangulaire inférieure (supérieure) si :

$$\forall i < j \quad (i > j) : a_{ij} = 0$$

In matrice unité  $I_1 = (1)$  ;  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ...

la matrice transposée de  $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  est  ${}^tM = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} / b_{ji} = a_{ij}$

$M$  est symétrique si  ${}^tM = M$ , antisymétrique si  ${}^tM = -M$

3/ Opérations sur les matrices

$$a) \quad M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad N = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{Somme : } M + N = (c_{ij}) \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\text{Multiplication par 1 scalaire } \alpha \cdot M = (c_{ij}) ; c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

$$b) \text{ Produit } M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad N = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$MN = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{où } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$



## c/ Propriétés

- $(M+N)+P = M+(N+P)$ ;  $M+N = N+M$ ,  $M+O = O+M = M$
- $M.(N.P) = (M.N).P$  . En general  $MN \neq NM$  (produit n'est pas commutatif)
- $M.I = I.M = M$
- L'ensemble de matrice  $(M_n(K), +, \cdot)$  est un anneau non commutatif non intègre (càd admet des diviseurs de zéro :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ )
- L'ensemble  $(M_n(K), +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $K$ .

## d/ Matrice inversible

Definition:  $M \in M_n(K)$  est inversible si il existe  $M'$  de  $M_n(K)$  tel que

$$M.M' = M'.M = I \quad \text{et on note} \quad M' = M^{-1}$$

Theoreme: Si  $M$  et  $N$  sont 2 matrice inversible alors  $MN$  est inversible et on a  $(MN)^{-1} = N^{-1}.M^{-1}$

## 4/ Matrices d'une application linéaire

a/ Definition:  $g$  application linéaire de  $E$  vers  $F$

$B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  base de  $E$  et  $B' = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$  base de  $F$

Posons  $g(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$  : On note  $M = M(g, B, B')$  :

la matrice de  $g$  dans les bases  $B$  et  $B'$  et la matrice de vecteurs colonnes  $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$

## b/ Matrice de l'image d'un vecteur

Soit  $X \in E$  et  $Y = g(X) \in F$  alors  $Y = M(g, B, B') \cdot X$

## c/ Matrice de la composée de 2 applications linéaires

$$c_1: M(h \circ g, B, B'') = M(h, B', B'') \times M(g, B, B')$$

$c_2$ : Si  $\dim E = \dim F = n$  alors  $g$  un isomorphisme de  $E$

si et si  $M(g, B, B')$  est inversible et  $M(g^{-1}, B', B) = [M(g, B, B')]^{-1}$

## d/ Changement de base

Theoreme:  $A = M(f, B, B_1)$  et  $A' = M(f, B', B'_1)$  alors  $A' = P^{-1}AP$

où  $P = M(\text{Id}, B_1, B'_1)$  matrice de passage de  $B_1$  à  $B'_1$

## 5/ Rang d'une matrice : $M$ matrice de type $m \times n$

Le rang de  $M$  est le rang de vecteurs ligne ou de vecteurs colonnes de  $M$

Propriété :  $0 \leq \text{rg } M \leq \min(n, m)$  ;  $\text{rg } O = 0$   $O$  matrice nulle



## 1/ Définitions

- $E$  et  $F$  2 espaces vectoriels sur  $K$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) de dimensions finies  
l'application:  $f: E \rightarrow F$  est linéaire si:

$$i/ \forall (x, y) \in E^2: f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$ii/ \forall \alpha \in K: \forall x \in E: f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

ce qui équivaut à:  $\forall (x, y) \in E^2; \forall (\alpha, \beta) \in K^2: f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

- Toute application linéaire de  $E$  dans  $E$  est dite un endomorphisme de  $E$
- Toute application bijective et linéaire de  $E$  dans  $F$  est un isomorphisme et  $f^{-1}$  est l'application réciproque de  $F$  dans  $E$  est linéaire et bijective
- Toute endomorphisme bijectif de  $E$  est un automorphisme de  $E$
- $\mathcal{L}_K(E, F)$  (resp.  $\mathcal{L}_K(E)$ ): ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  (dans  $E$ )

## 2/ Noyau et Image

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$

a/ Noyau de  $f$ :  $\text{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

Propriété:  $\text{Ker} f$  est un s.e.v de  $E$

Theoreme:  $f$  est injective de  $E \rightarrow F \Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0\}$

b/ Image de  $f$ :  $\text{Im} f = f(E) = \{f(x); x \in E\} = \{y \in F; \exists x \in E; y = f(x)\}$

Propriété:  $\text{Im} f$  est un s.e.v de  $F$

Theoreme:  $f$  est surjective de  $E \rightarrow F \Leftrightarrow \text{Im} f = F$

## 3/ Theoreme

Si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  alors tout espace vectoriel supplémentaire dans  $E$  du noyau,  $\text{Ker} f$ , est isomorphe à  $\text{Im} f$ .

## 4/ Propriétés et theoremes

$f$  application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  parties de  $E$

- Si  $A$  engendre  $E$  alors  $f(A)$  engendre  $f(E)$
- Si  $A$  est liée dans  $E$  alors  $f(A)$  est liée dans  $F$

Remarque: l'image d'une partie libre n'est pas libre en général.



•  $f$  est injective  $\Leftrightarrow$  l'image de  $f$  par toute partie libre de  $E$  est une partie libre de  $E$

• Soient  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$   $n$  vecteurs de  $F$  : il existe une application linéaire unique  $f$  de  $E$  dans  $F$  telle que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : f(e_i) = u_i$

Conséquence : Une application linéaire de  $E$  dans  $F$  est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base de  $E$

### 5/ Rang d'une application linéaire

a/ Définition :  $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$

b/ Théorème : Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  base de  $E$ , le rang de  $f$  est égale au rang des vecteurs  $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$  c'est le nombre maximum de ces vecteurs linéairement indépendants.

### c/ Théorème

Si  $f : E \rightarrow F$  est linéaire alors

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \text{Im } f \quad \text{ou encore} \quad \dim E = \dim \ker f + \text{rg } f$$

### d/ Corollaire 1

$$* \quad f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{rg } f = \dim E$$

$$* \quad f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{rg } f = \dim F$$

### e/ Corollaire 2

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \Leftrightarrow \dim E = \dim F$$

### f/ Corollaire 3

Si  $f$  est linéaire et  $\dim E = \dim F$  alors

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$





ETUSUP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Diapo  
Algèbre  
Corrigés  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..